12/5/2017

$1^{\underline{o}}$ Θεώρημα Ισομορφισμών Ομάδων: Αν $\varphi: G_1 \to G_2$ είναι ομομορφισμός ομάδων, τότε η απεικόνιση $\bar{\varphi}: G_1 / Ker(\varphi) \to Im(\varphi)$ με $\bar{\varphi}(x Ker(\varphi)) = \varphi(x)$ είναι ισομορφισμός ομάδων.

Πόρισμα: (1) Αν $\varphi: G_1 \to G_2$ είναι επιμορφισμός ομάδων, τότε η $G_1 / Ker(\varphi) \cong G_2$.

(2) Αν $\varphi: G_1 \to G_2$ είναι μονομορφισμός ομάδων, τότε η $G_1 \cong Im(\varphi) \leq G_2$

Απόδειξη: (1) Η φ είναι επιμορφισμός $\Rightarrow \text{Im}(\varphi) = G_2$

$\Rightarrow$ από 1º Θεώρημα Ισομορφισμών έχουμε το ζητούμενο.

(2) Επειδή η φ είναι μονομορφισμός $\Rightarrow \text{Ker}(\varphi) = \{e\}$ και

τότε $G_1/\text{Ker}(\varphi) \cong G_1$ και από 1º Θεώρημα Ισομορφισμών

θα είναι ισόμορφη με την $\text{Im}(\varphi) \leq G_2$

Άρα $G_1 \cong G_1/\{e\} \cong \text{Im}(\varphi) \leq G_2$

Άσκηση: Έστω $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid a\cdot d \neq 0 \right\}$

(i) Να δειχθεί ότι $G \leq GL_2(\mathbb{R})$

(ii) Να δειχθεί ότι αν $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid b \in \mathbb{R} \right\} \trianglelefteq G$

(iii) Νδο $H \cong \mathbb{R}$

(iv) Να περιγραφεί η ομάδα πηλίκο G/H.

Λύση: (i) $\forall A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G \Rightarrow |A| = a\cdot d \neq 0 \Rightarrow A$ αντιστρέψιμος

$\Rightarrow A \in GL_2(\mathbb{R})$: Άρα $G \subseteq GL_2(\mathbb{R})$

Επιπλέον, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \in G \Rightarrow G \neq \emptyset$

Scanned by CamScanner

Αν τώρα $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ 0 & \delta' \end{pmatrix} \in G$ τότε

$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ 0 & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' & \alpha\beta' + \beta\delta' \\ 0 & \delta\delta' \end{pmatrix}$ και αφού

$\alpha \cdot \alpha' \cdot \delta\delta' \neq 0$, διότι $\alpha\delta \neq 0$ και $\alpha'\delta' \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ 0 & \delta' \end{pmatrix} \in G$

Έστω $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \in G \Rightarrow \alpha\delta \neq 0$. Τότε θέλω να δείξω ότι

$A^{-1} \in G$. Τότε $A^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \in G$. Άρα από τα

παραπάνω $G \leq GL_2(\mathbb{R})$

(ii) Θέλουμε έναν ομομορφισμό ομάδων από τη G σε μια άλλη γνωστή μας ομάδα με πυρήνα το H.

Θεωρούμε την $\varphi: G \to \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, $\varphi\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}\right) = (\alpha, \delta)$

Τότε $\varphi\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ 0 & \delta' \end{pmatrix}\right) = (\alpha\alpha', \delta\delta') = (\alpha,\delta)\cdot(\alpha',\delta') = \varphi\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}\right) \cdot \varphi\left(\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ 0 & \delta' \end{pmatrix}\right)$

Άρα, φ ομομορφισμός

Η φ επιμορφισμός, αφού $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ τότε $\varphi\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}\right) = (x,y)$

τότε $Ker(\varphi) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \in G \mid \varphi\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}\right) = (1,1) \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \in G \mid (\alpha,\delta) = (1,1) \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \mid \beta \in \mathbb{R} \right\} = H$. Άρα, $H \trianglelefteq G$, αφού

προκύπτει ως πυρήνας ομομορφισμού ομάδων

Άρα από το 1º θεώρημα ισομορφισμών έπεται ότι $G/H \cong \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, με ισομορφισμό $\Phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} H\right)$

(3) Πολλαπλασιάζω δυο στοιχεία της H.

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b+b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Τότε ορίζω $g : H \to \mathbb{R}$, $g\left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = b$

• Τότε $g\left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = g\begin{pmatrix} 1 & b+b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = b+b' = g\left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) + g\left(\begin{pmatrix} 1 & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

Άρα η g είναι ομομορφισμός

• Για το επί $\forall b \in \mathbb{R}$ $g\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = b \Rightarrow g$: επιμορφισμός

• $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Ker(g) \Leftrightarrow g\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow Ker(g) = I_2$

Άρα g: μονομορφισμός ομάδων.

Άσκηση: Αν $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & a & b \\ 0 & y & c \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{R}) \mid xyz \neq 0 \right\}$

$\Rightarrow$ ομάδα του Heisenberg

$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{R}) \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

ΝΔο : (1) $G \leq GL_3(\mathbb{R})$

(2) $H \trianglelefteq G$

(3) $G \backslash H = ;$

Άσκηση: Έστω $T = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \} \subseteq \mathbb{C}^*$

ΝΔο : (1) $T \leq \mathbb{C}^*$ (2) $\mathbb{C}^* \backslash T$

(1) Άμεσο

(2) $\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^+$ με $\varphi(z) = |z|$

Τότε $\varphi(z \cdot w) = |z \cdot w| = |z| \cdot |w| = \varphi(z) \cdot \varphi(w)$

$\Rightarrow \varphi$ ομομορφισμός.

επιπλέον, η φ είναι επιμορφισμός διότι $\forall r \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \exists r' \in \mathbb{C}^* : \varphi(r') = r'$

και $Ker(\varphi) = \{ z \in \mathbb{C}^* \mid \varphi(z) = 1 \} = \{ z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1 \} = T$

$1^{\underline{o}}$ Θεώρημα Ισομορφισμών $\Rightarrow$ $\mathbb{C}^*/\mathbb{T} \cong \mathbb{R}^*$

$3^{\underline{o}}$ Θεώρημα Ισομορφισμών Ομάδων:

Έστω ότι G: ομάδα και $H \trianglelefteq G$ και $N \trianglelefteq G$

Αν τώρα $N \subseteq H$ τότε: (i) $N \trianglelefteq H$

(ii) $H/N \trianglelefteq G/N$

(iii) $G/N \big/ H/N \cong G/H$

Απόδειξη: Αφού $N \trianglelefteq G \Leftrightarrow \forall g \in G, \forall x \in N: g^{-1} \circ x \circ g \in N$

$\Rightarrow \forall h \in H, \forall x \in N: h^{-1} \circ x \circ h \in N$. Άρα $N \trianglelefteq H$ και

άρα ορίζεται η H/N

Ορίζω την $\varphi: G/N \to G/H$, $\varphi(xN) = xH$.

Η φ είναι καλά ορισμένη αφού αν: $xN = yN$

$\Rightarrow x^{-1} \circ y \in N \overset{N \subseteq H}{\Rightarrow} x^{-1} \circ y \in H \Rightarrow xH = yH \Rightarrow \varphi(xN) = \varphi(yN)$

Scanned by CamScanner

Επιπλέον, $\varphi(xN\cdot yN) = \varphi(xy/N) = (x\cdot y)H = (xH)\cdot(yH) = \varphi(xN)\cdot\varphi(yN)$

$\Rightarrow \varphi$: ομομορφισμός.

φ: επιμορφισμός, διότι $\forall xH \in G\backslash H$: $\varphi(xN) = xH$

$Ker(\varphi) = \{xN \in G\backslash N \mid \varphi(xN) = e_{G\backslash H}\} = \{xN \in G\backslash N \mid xH = H\}$

$= \{xN \in G\backslash N \mid x \in H\} = H\backslash N$

Άρα, $Ker(\varphi) = H\backslash N$, επομένως αφού $H\backslash N$ εμφανίζεται ως πυρήνας ομομορφισμού $\Rightarrow H\backslash N \trianglelefteq G\backslash N$. Επιπλέον, από 1ο Θεώρημα Ισομορφισμών $\Rightarrow G\backslash N \backslash Ker(\varphi) \cong Im(\varphi)$

$\Rightarrow G\backslash N \big\backslash H\backslash N \cong G\backslash H$

4ο Θεώρημα Ισομορφισμών Ομάδων

Αν $\varphi: G_1 \to G_2$ είναι ένας επιμορφισμός ομάδων. Τότε η απεικόνιση $\phi: \{H \leq G_1 \mid Ker(\varphi) \leq H\} \longrightarrow \{K \leq G_2\}$, με $\phi(H) = \varphi(H)$ με αντίστροφη την $\Psi(K) = \varphi^{-1}(K)$

Απόδειξη: (I) Αν $H \leq G_1$ με $Ker(\varphi) \subseteq H$, τότε $\varphi(H) \leq G_2$

διότι: (i) $e' \in \varphi(H)$, αφού $e' = \varphi(e) \in \varphi(H)$, αφού $e \in H$

(ii) Αν $x, y \in \varphi(H)$ τότε αφού $x \in \varphi(H) \Rightarrow x = \varphi(a), a \in H$
$y \in \varphi(H) \Rightarrow y = \varphi(b), b \in H$

Τότε $x \cdot y^{-1} = \varphi(a) \cdot (\varphi(b))^{-1} = \varphi(a) \cdot \varphi(b^{-1}) = \varphi(a \cdot b^{-1}) \in \varphi(H)$

διότι $a \cdot b^{-1} \in H$ (καθώς $H \_ G_1$)

Από τα παραπάνω $\varphi(H) \leq G_2$

Αντίστροφα, αν $K \leq G_2$. Θα δείξουμε ότι $\varphi^{-1}(K) = \{a \in G_1 : \varphi(a) \in K\} \leq G_1$

και περιέχει το $Ker(\varphi)$
(δηλ. $Ker(\varphi) \subseteq \varphi^{-1}(K)$)

Πράγματι, • $e \in \varphi^{-1}(K)$ διότι: $\varphi(e) = e' \in K$ (καθώς $K \leq G_2$)

• Έστω $a, b \in \varphi^{-1}(K) \Rightarrow \varphi(a), \varphi(b) \in K \leq G_2$

$\Rightarrow \varphi(a) \cdot (\varphi(b))^{-1} \in K \Rightarrow \varphi(a \cdot b^{-1}) \in K$

$\Rightarrow a \cdot b^{-1} \in \varphi^{-1}(K)$. Επομένως $\varphi^{-1}(K) \leq G_1$

Έστω, $a \in Ker(\varphi) \Rightarrow$ ~~φα~~ $\varphi(a) = e' \in K$

Άρα $\forall a \in Ker(\varphi) \Rightarrow \varphi(a) \in K \Rightarrow a \in \varphi^{-1}(K)$

Άρα, $Ker(\varphi) \subseteq \varphi^{-1}(K)$

Ως τώρα δείξαμε ότι οι απεικονίσεις Φ, Ψ είναι καλά ορισμένες

Μένει να δείξουμε ότι: (i) $\forall H \leq G_1$ με $Ker(\varphi) \subseteq H$: $\varphi^{-1}(\varphi(H)) = H$.

(ii) $\forall K \leq G_2$: $\varphi(\varphi^{-1}(K)) = K$

(i) Έστω $x \in H \Rightarrow \varphi(x) \in \varphi(H) \Rightarrow x \in \varphi^{-1}(\varphi(H))$. Άρα $H \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(H))$ (1)

Έστω $x \in \varphi^{-1}(\varphi(H)) \Rightarrow \varphi(x) \in \varphi(H) \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(h)$, όπου $h \in H$

$\Rightarrow \varphi(x) \circ (\varphi(h))^{-1} = e' \Rightarrow \varphi(x \cdot h^{-1}) = e' \Rightarrow x \cdot h^{-1} \in Ker(\varphi) \subseteq H$

$\Rightarrow x \cdot h^{-1} \in H \Rightarrow x \cdot h^{-1} = h' \in H \Rightarrow x = h \circ h' \in H$, διότι $h, h' \in H$

Άρα $\varphi^{-1}(\varphi(H)) \subseteq H$ (2). Από (1) και (2) $\Rightarrow H = \varphi^{-1}(\varphi(H))$

(ii) Έστω $x \in K$. Επειδή φ: επί $\Rightarrow \exists a \in G : \varphi(a) = x \in K$

$\Rightarrow a \in \varphi^{-1}(K) \Rightarrow x \in \varphi(\varphi^{-1}(K))$. Άρα $K \subseteq \varphi(\varphi^{-1}(K))$ (3)

Έστω τώρα $x \in \varphi(\varphi^{-1}(K)) \Rightarrow x = \varphi(a)$ όπου $a \in \varphi^{-1}(K)$

$\Rightarrow \varphi(a) \in K \Rightarrow x \in K$. Άρα $\varphi(\varphi^{-1}(K)) \subseteq K$ (4)

Από (3) και (4) $\Rightarrow \varphi(\varphi^{-1}(K)) = K$

Πόρισμα: Αν G: ομάδα και $N \trianglelefteq G$. Τότε οι υποομάδες της G/N είναι της μορφής H/N, όπου $H \leq G$ ώστε $N \leq H$

Απόδειξη: Θεωρούμε τον επιμορφισμό ομάδων:

$\pi : G \to G/N$, $\pi(x) = xN$ και τότε

$Ker(\pi) = N$. Άρα, από 4ο Θεώρημα Ισομορφισμών ομάδων οι υποομάδες της G/N είναι της μορφής $\pi(H)$ όπου $H \leq G$ με την ιδιότητα $Ker(\pi) = N \leq H$. Επειδή, $\pi(H) = \{xN \in G/N \mid x \in H\}$

$= H/N$.

Παράδειγμα: Ποιές είναι οι υποομάδες της $\mathbb{Z}_n$;

Επειδή $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Τότε οι υποομάδες της $\mathbb{Z}_n$ είναι της μορφής $H/n\mathbb{Z}$, όπου $H \leq \mathbb{Z}$ με $n\mathbb{Z} \leq H$

Όμως $H = m\mathbb{Z}$ για κάποιο $m = 0, 1, 2, \dots$. Άρα, οι υποομάδες της $\mathbb{Z}_n$ είναι της μορφής: $m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ όπου $n\mathbb{Z} \leq m\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow m \mid n$

Άρα, οι υποομάδες της $\mathbb{Z}_n$ είναι της μορφής: $m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

όπου $m|n$ με $|m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = [m\mathbb{Z}:n\mathbb{Z}] = \frac{n}{m}$

αφού 3ο Θεώρημα Ισομορφισμών $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \big/ m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_m$

$\Rightarrow |\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \big/ m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}_m| \Rightarrow |\mathbb{Z}_n| \big/ |m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}_m|$

$\Rightarrow |m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = \frac{n}{m}$. Άρα, $m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_{\frac{n}{m}}$

Οι Ομομορφισμοί μιας Κυκλικής Ομάδας

Έστω $G = \langle a \rangle$ μια κυκλική ομάδα

Μια απεικόνιση $\varphi: G \to G$ είναι ομομορφισμός ομάδων αν-ν

$\exists k \in \mathbb{Z} : \varphi(x) = x^k, \forall x \in G$

Απόδειξη: $(\Leftarrow)$ $\forall x, y \in G: \varphi(x \cdot y) = (x \cdot y)^k = \underbrace{(x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \cdot \ldots (x \cdot y)}_{\leftarrow k-\text{φορές} \rightarrow}$

$\overset{\text{αβελιανή ως κυκλική}}{=} \underbrace{(x \cdot x \cdot x \ldots \cdot x)}_{k-\text{φορές}} \cdot \underbrace{(y \cdot y \ldots y)}_{k-\text{φορές}} = x^k \cdot y^k = \varphi(x) \cdot \varphi(y) \Rightarrow \varphi$ ομομορφισμός

$(\Rightarrow)$ Έστω $\varphi(a) \in G = \langle a \rangle \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: \varphi(a) = a^k$

Επιπλέον $\forall x \in G = \langle a \rangle \Rightarrow x = a^n$, όπου $n \in \mathbb{Z}$. Τότε

$\varphi(x) = \varphi(a^n) = (\varphi(a))^n = (a^k)^n = a^{nk} = (a^n)^k = x^k$

Άρα, $\forall x \in G: \varphi(x) = x^k$

Αν η G είναι άπειρη κυκλική και $\exists\, k, l \in \mathbb{Z}$: $\varphi(x) = x^k = x^l, \forall x \in G$

Τότε $a^k = a^l \Rightarrow a^{k-l} = e \Rightarrow k - l = 0 \Rightarrow k = l$, αφού

$o(a) = +\infty$, διαφορετικά $o(a) < +\infty$ (άτοπο)

Άρα, αν η G είναι άπειρη κυκλική και $\varphi : G \to G$
ομομορφισμός τότε $\exists!\,(k \in \mathbb{Z})$: $\varphi(x) = x^k$, $\forall x \in G$

Άρα οι ανά δυο διαφορετικοί ομομορφισμοί $\varphi : G \to G$

Είναι οι εξής : $\{\varphi_k : G \to G,\ \varphi_k(x) = x^k, \forall x \in G\}$, $k \in \mathbb{Z}$.